



**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016**

CLASA a IV-a

Subiectul 1.

- a) Să se determine numărul a din egalitatea $2 \times \{3 + 2 \times [4 + 5 \times (a + 6)]\} + 1834 = 2016$.
- b) Suma a trei numere naturale este 225. Dacă din primul număr scădem 47, din al doilea 39 și din al treilea 58, se obține de fiecare dată același rezultat. Aflați cele trei numere.

Subiectul 2.

Aflându-se la bunici, Vasile vrea să numere păsările din curte. El observă că le poate grupa astfel încât la 5 găini să-i corespundă 2 rațe, iar la 3 rațe să-i corespundă o găscă. Știind că în curte erau 69 de păsări, aflați câte păsări de fiecare fel sunt în curte?

Subiectul 3.

Completați următorul careu cu cifre de la 1 la 9, fiecare cifră luată o singură dată, astfel încât suma pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare diagonală să fie aceeași.

- a) Justificați de ce cifra 5 se află în mijlocul careului.
- b) Câte variante de completare sunt?

Notă:

- 1) Timp de lucru 2 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a IV-a-rezerva

Subiectul 1. Se știe că $48:4-3 \cdot (a+1)=3$. Ce rezultat obținem dacă schimbăm între ele, semnele:

- a) De adunare și scădere;
- b) De înmulțire și împărțire;
- c) De împărțire și adunare;
- d) De înmulțire și scădere.

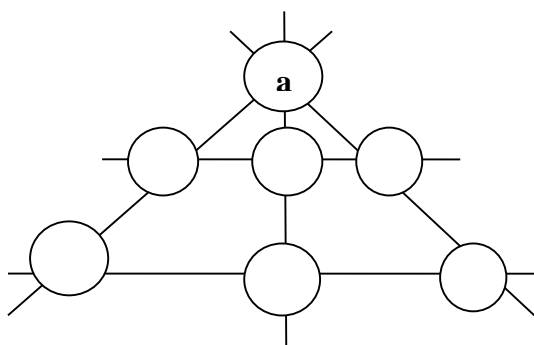
Subiectul 2.

- a) Determinați trei numere naturale consecutive, știind că suma lor este cu 2016 mai mare decât unul dintre numere.
- b) Ioana citește o carte care are 96 de pagini în patru zile. Ea citește în prima zi un anumit număr de pagini. A doua zi citește dublul numărului de pagini citite în prima zi. A treia zi citește triplul numărului de pagini citite în a doua zi și astfel constată că mai are de citit cu 6 pagini mai mult decât a citit în prima zi. Aflați câte pagini a citit în fiecare zi.

Subiectul 3.

În cercelețele din desenul de mai jos sunt așezate numerele 1,2,3,4,5,6,7 astfel încât suma numerelor de pe fiecare dreaptă să fie aceeași.

- a) Arătați că valoarea lui **a** este 4.
- b) Cât este suma numerelor de pe o linie?



Notă:

- 1) Timp de lucru 2 h.
- 2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a V - a

Subiectul 1.

a) Să se calculeze :

$$243^{20} : [81^{10} \cdot 9^{29} + (243^2 \cdot 27^5)^5 : 27^9 + (64^{19} : 8^{37} + 1^0)^9 \cdot 81^{20}]$$

b) Să se determine numerele naturale n și k , care verifică egalitatea : $7 \cdot 9^n + 9^{2k} = 81^3 \cdot 64$

Subiectul 2.

Să se determine numărul natural n de forma \overline{abcd} , știind că împărțindu-l la \overline{bcd} se obține câtul $a+1$ și restul $a+2$.

Subiectul 3.

Următorul tablou de numere naturale conține 200 de linii :

			2			
		2	4	2		
	2	4	6	4	2	
2	4	6	8	6	4	2
.....						

a) Ce număr se află pe poziția din mijloc a ultimei linii ?

b) De câte ori apare numărul 100 în acest tablou ?

c) Câte numere conține tabloul ?

Notă:

1) Timp de lucru 2 h.

2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a VI-a

Subiectul 1.

Se consideră mulțimile $A = \{6, 13, 20, \dots, 601\}$ și $B = \{1, 5, 9, \dots, 601\}$

- Aflați $\text{card}(A) + \text{card}(B)$;
- Arătați că mulțimea A nu conține nici un pătrat perfect;
- Calculați suma elementelor mulțimii $A \cap B$.

Subiectul 2.

Se consideră numărul $n = 4^{2016}$.

- Să se determine restul împărțirii lui n la 3;
- Să se arate că n are cel puțin 1210 cifre;
- Eliminăm câteva din primele cifre ale numărului n , pe care le adunăm la numărul rămas. Continuăm procedeul până obținem un număr de zece cifre. Arătați că acest număr are cel puțin două cifre egale.

Subiectul 3.

Fie $n \in \mathbb{N}$ și unghiurile proprii $\angle A_1OA_2, \angle A_2OA_3, \dots, \angle A_nOA_1$ în jurul punctului O , cu $m(\angle A_1OA_2), m(\angle A_2OA_3), \dots, m(\angle A_nOA_1)$ numere naturale impare în ordine crescătoare (exprimate în grade).

- Să se determine valoarea maximă a lui n .
- Pentru valoarea determinată la punctul **a)** calculați măsura unghiului format de bisectoarele $\angle A_{10}OA_{11}$ și $\angle A_{13}OA_{14}$.

Notă:

- Timp de lucru 2 h.
- Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016
CLASA a VII-a**

Subiectul 1.

$$\text{Fie } x = \left(1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+2016} \right)^n \cdot \frac{2017^n}{2^n}.$$

Să se determine $n \in \mathbf{N}$ astfel încât x să aibă 165 divizori.

Subiectul 2.

Fie $ABCD$ un pătrat, punctul M simetricul lui B față de A și $N \in (AC)$ astfel încât $m(\angle AMN) = 15^\circ$. Arătați că $[MN] \equiv [AC]$.

(Gazeta Matematică Nr.10/2016)

Subiectul 3.

Se consideră mediana AD a triunghiului ABC , $D \in (BC)$.

- Să se construiască triunghiul ADP având lungimile laturilor egale cu lungimile medianelor triunghiului ABC .
- Să se calculeze lungimile medianelor triunghiului ADP construit la punctul a) în funcție de laturile triunghiului ABC .

Subiectul 4.

Trei numere naturale x, y, z nu au niciun factor prim comun și satisfac relația $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$. Să se demonstreze că $x + y$ este pătrat perfect.

Notă:

- Timp de lucru 3 h.
- Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



**Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016**

CLASA a VIII-a

Subiectul 1.

Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $x \in (1, 2)$ și $y \in (2, 3)$. Arătați că $2xy - 5x - 3y + 7 < 0$.

Subiectul 2.

Calculați minimul expresiei $4ab + \frac{1}{ab}$ știind că $a, b \in (0, \infty)$ și $(2a + 5)(b + 1) = 6$, iar apoi determinați a și b pentru care se realizează acest minim.

Subiectul 3.

Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră și M, N, P, Q proiecțiile vârfului V pe bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle VAB$, $\sphericalangle VBC$, $\sphericalangle VCD$ și $\sphericalangle VDA$. Arătați că punctele M, N, P, Q sunt coplanare.

Subiectul 4.

Fie patrulaterul convex ortodiagonal $ABCD$ care admite un cerc înscris. Notăm cu O intersecția diagonalelor și cu r_1, r_2, r_3, r_4 razele cercurilor înscrise respectiv în triunghiurile AOB , BOC , COD și DOA . Să se arate că $r_1 + r_3 = r_2 + r_4$.

(Gazeta Matematică Nr.12/2007)

Notă:

- 1) Timp de lucru 3 h.
- 2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a IX -a

Subiectul 1.

Pentru orice număr natural n , se notează cu $p(n)$ cel mai mare pătrat perfect cel mult egal cu n .
Să se determine numerele naturale a pentru care $p\left(\frac{a+1}{2}\right) = \frac{a+2}{3}$.

(Lucian Dragomir - O.N./ 2002)

Subiectul 2.

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $[x^2] = 3 \cdot [x] + 1$, unde $[x]$ reprezintă partea
întregă a numărului real x .

Subiectul 3.

Fie a și b două numere reale pozitive astfel încât $a + b = 1$. Să se arate că :

$$\frac{1}{1+4 \cdot a \cdot b} + \frac{2 \cdot a^2}{2 \cdot a^2 + b} + \frac{2 \cdot b^2}{2 \cdot b^2 + a} \geq \frac{3}{2}$$

(Gazeta Matematică Nr. 1 / 2013)

Subiectul 4.

Fie ABC un triunghi ascuțitunghic cu ortocentrul H și centrul cercului circumscris O . Se notează
 X, Y, Z centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC , HAC respectiv HAB . Să se
demonstreze că:

$$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{OH}$$

(Gazeta Matematică Nr. 10 / 2016)

Notă:

- 1) Timp de lucru 3 h.
- 2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a X-a

Subiectul 1.

Fie a un număr real, $a > 0$. Arătați că:

- a) dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu $x + y + z = 0$, atunci $a^x + \sqrt{a^y} + \sqrt[3]{a^z} > \sqrt{6}$.
b) dacă $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ cu $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 0$, atunci
$$a^{x_1} + \sqrt{a^{x_2}} + \sqrt[3]{a^{x_3}} + \dots + \sqrt[n]{a^{x_n}} > \frac{n(n+1)}{2} (n!)^{-\frac{2}{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Subiectul 2. Determinați numerele reale x, y, z astfel încât

$$\begin{cases} 2^x = 1 + \frac{1}{y^2} \\ 2^y = 1 + \frac{1}{z^2} \\ 2^z = 1 + \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

(Supliment Gazeta Matematică Nr. 4/ 2016)

Subiectul 3.

Fie a un număr real, $a > 0$.

Să se arate că funcția $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dată de $f(n) = n + [a\sqrt{n}]$ este injectivă și nu e surjectivă.

Subiectul 4.

Fie numerele complexe $z_1, z_2, z_3, \dots, z_{2016} \in \mathbb{C}$ pentru care $z_{k+1} = z_k z_{k+1} + 1$ pentru orice $k \in \{1, 2, 3, \dots, 2016\}$.

- a) Să se arate că $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_{2016} \in \mathbb{R}$
b) Să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=1}^{2016} \frac{1}{1 + |z_k| + |z_k z_{k+1}|}.$$

Notă:

- 1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a XI-a

Subiectul 1.

Arătați că șirul $(x_n)_{n \geq 2}$ cu termenul general dat prin

$$x_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}, \quad n \geq 2$$

este un șir mărginit.

Subiectul 2.

Fie șirul de numere reale pozitive $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 = x_1 = 1$ și

$$(n+1)! \cdot (x_{n+1}\sqrt{x_{n-1}} - x_n\sqrt{x_n}) = n \cdot \sqrt{x_{n-1}x_n}, \quad n \geq 1$$

- a) Determinați $a_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_{n+1} = a_n \cdot \sqrt{x_n}$, $n \in \mathbb{N}$.
b) Studiați monotonia și mărginirea șirului $(x_n)_{n \geq 0}$.

Subiectul 3.

Fie $k, n \in \mathbb{N}^*$ și $A_1, A_2, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ astfel încât

$$\sum_{\sigma \in S_k} A_{\sigma(1)} \cdot A_{\sigma(2)} \cdot \dots \cdot A_{\sigma(k)} = I_n,$$

unde S_k este mulțimea permutărilor de ordin k . Arătați că $n : k!$.

Subiectul 4.

Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Determinați matricele $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A = BAB$ și $B = ABA$.

Notă:

- 1) Timp de lucru 3 h.
2) Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.



Concursul “PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XI-a, Baia Mare, 26 noiembrie 2016

CLASA a XII-a

Subiectul 1.

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, mulțimea $N_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ și legea de compoziție $\circ: N_n \times N_n \rightarrow N_n$ pentru care

$$0 \circ y = (y + 1) \bmod n, \quad \forall y \in N_n$$

$$x \circ 0 = (x - 1) \circ 1, \quad \forall x \in N_n$$

$$x \circ y = (x - 1) \circ [x \circ (y - 1)], \quad \forall x, y \in N_n \setminus \{0\}.$$

- Arătați că egalitatea $0 \circ 2 = 2 \circ 0$ are loc în orice mulțime N_n cu $n \geq 3$.
- Pentru $n = 4$, calculați suma $s = (2 \circ 0) + (2 \circ 1) + (2 \circ 2) + (2 \circ 3)$.
- Arătați că dacă $x \circ 1 = 1$, atunci $(x + 1) \circ y = 1$ oricare ar fi $y \in N_n$, $n \geq 2$.
- Dacă $f: \mathbb{N} \times N_7 \rightarrow N_7$, $f(x, y) = x \circ y$, determinați $f(2016, 3)$.

Subiectul 2.

Determinați primitiva funcției $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x + 1 - x^2 \ln x}{x^2(x + 1)} \cdot \cos(\ln(x + 1))$$

Subiectul 3.

Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcțiile

$$f_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin \frac{m}{x} & x \neq 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad g_m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \cos \frac{m}{x} & x \neq 0. \end{cases}$$

Folosind faptul că funcțiile f_m și g_m admit primitive, dați un exemplu de funcții $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admit primitive, dar funcția $F \cdot G$ nu admite primitive.

Subiectul 4.

Fie funcțiile neconstante $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și numerele reale $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, 8}$, pentru care $a_1 a_7 = a_3 a_5$ și $a_2 a_8 = a_4 a_6$, funcția $a_1 f + a_2 g$ este o primitivă a funcției $a_3 f + a_4 g$ și funcția $a_5 f + a_6 g$ este o primitivă a funcției $a_7 f + a_8 g$. Determinați funcțiile derivabile f și g pentru care $f(0) = g(0) = 1$.

Notă:

- Timp de lucru 3 h.
- Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.